УДК 62-50

Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф., зав. каф. КМММ НТУ «ХПИ»,
Д. В. ДЖУЛГАКОВ, студент НТУ «ХПИ»

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статті розглядається задача синтезу обернених динамічних моделей та побудови їх мінімальної реалізації у просторі станів. Аналізується взаємозв'язок обернених динамічних моделей і керованих систем з синергетичними законами управління.

В статье рассматривается задача синтеза обратных динамических систем и построения их минимальной реализации в пространстве состояний. Анализируется взаимосвязь обратных динамических моделей и систем, управляемых синергетическими законами управления.

In the paper inverse dynamical systems synthesis and construction of their minimal state-space realizations are considered. The relations of inverse systems and systems driven by synergetic controllers are analyzed.

Введение. Обратные динамические системы находят широкое применение в задачах восстановления входных сигналов динамических систем, компенсации внешних возмущающих воздействий, слежения за заданными траекториями [1]. Отличительной особенностью обратных систем является проекционный характер их динамики, что позволяет рассматривать их поведение как движение по некоторому инвариантному многообразию в пространстве состояний. Задачи синтеза законов управления, обеспечивающих движение по инвариантным многообразиям, относятся к проблемам синергетического управления [2]. Таким образом, представляет интерес анализ динамических свойств многомерных обратных динамических систем с точки зрения синергетического подхода.

Задача синтеза обратных динамических систем. Рассмотрим многомерную линейную стационарную динамическую систему, описываемую моделью в переменных состояния:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \,, \qquad (1)$$

где $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^m$ – вектора состояния, входов и выходов;

$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{m\times n}, D \in R^{m\times m}$ – матрицы параметров системы.

Введем в рассмотрение матричные параметры Маркова системы (1):

$$S(0) = D, S(\alpha) = CA^{\alpha-1}B, \alpha = \overline{0,n} \,. \qquad (2)$$

Обозначим через α относительный порядок системы, то есть такое минимальное неотрицательное целое число, что $S(\alpha) \neq 0$. Будем рассматривать только строго реализуемые системы, для которых $D=0, \alpha>0$.

Построим обратную динамическую модель системы (1). Рассмотрим последовательные производные выхода:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}=CAx+CBu=CAx \\
&\ddot{y}=CA^2x+CABu=CA^2x \\
&\ldots \\
&y^{(\alpha)}=CA^{\alpha}x+S(\alpha)u,
\end{aligned} \tag{3}$$

и примем уравнение обратной динамической системы в виде:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\dot{x}_I=Fx_I+BS^{-1}(\alpha)y^{(\alpha)} \\ y=S^{-1}(\alpha)CA^{\alpha}x_I+S^{-1}(\alpha)y^{(\alpha)}\end{cases}; \\
&F=A-BS^{-1}(\alpha)CA^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Действительно, рассмотрим передаточную функцию системы (4):

$$W_I(s)=S^{-1}(\alpha)\cdot s^{\alpha}-S^{-1}(\alpha)CA\left(sI_n-F\right)^{-1}BS^{-1}(\alpha)\cdot s^{\alpha}\ . \tag{5}$$

Вычислим резольвенту оператора F, обозначив $R_A=\operatorname{Res}A=\left(sI_n-A\right)^{-1}$. Тогда по теореме об обращении суммы матриц [3]:

$$\left(sI_n-F\right)^{-1}=\left(sI_n-A+BS^{-1}(\alpha)CA^{\alpha}\right)^{-1}=R_A-R_AB\left(S(\alpha)+CA^{\alpha}R_AB\right)^{-1}CA^{\alpha}R_A \tag{6}$$

По индукции несложно доказать, что $A^kR_A=s^kR_A-\sum_{i=0}^{k-1}s^{k-i-1}A^i$.

Тогда с учетом того, что $S(i)=0$ при $i<\alpha$:

$$CA^{\alpha}R_AB=s^{\alpha}CR_AB-\sum_{i=0}^{\alpha-1}s^{\alpha-i-1}S(i+1)=s^{\alpha}W(s)-S(\alpha)\ , \tag{7}$$

где $W(s)=CR_AB$ - передаточная функция исходной системы (1), получаем:

$$\left(sI_n-F\right)^{-1}=R_A-s^{-\alpha}R_AB\left(W(s)\right)^{-1}CA^{\alpha}R_A; \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&W_I(s)=s^{\alpha}S^{-1}(\alpha)-s^{\alpha}S^{-1}(\alpha)CA^{\alpha}R_ABS^{-1}(\alpha)+ \\
&+S^{-1}(\alpha)CA^{\alpha}R_AB\left(W(s)\right)^{-1}CA^{\alpha}R_ABS^{-1}(\alpha)=\left(W(s)\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, система (4) действительно является моделью обратной динамической системы для (1).

Рассмотрим характеристический полином обратной динамической системы (4):

$$\Delta_I(s) = \left|sI_n - F\right| = \Delta(s)\cdot\left|I_n + BS^{-1}(\alpha)CA^{\alpha}R_A\right| = \Delta(s)\cdot\left|W(s)\right|\cdot s^{\alpha m}\cdot\left|S^{-1}(\alpha)\right|. \quad (10)$$

Полином $\Delta_0(s) = \Delta(s)\cdot\left|W(s)\right|$ является полиномом нулей исходной системы (1). Таким образом, получаем известный результат [4] о том, что полюса системы (4) совпадают с нулями исходной системы (1). Кроме того система (4) имеет нулевой полюс кратности αm, а потому реализация в пространстве состояний (4) не является минимальной. Действительно:

$$\begin{aligned} &CA^k\dot{x}_I(t) = CA^{k+1}\dot{x}_I(t),\ k = \overline{0, a-2};\\ &CA^{\alpha-1}\dot{x}_I(t) = y_I^{(\alpha)}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Для упрощения выкладок предположим выполнение условий согласованности начальных условий для обратной модели:

$$CA^k\dot{x}_I(0) = y_I^{(\alpha)}(0),\ k = \overline{0, a-1}. \quad (12)$$

Введем обозначения $R(i) = \begin{pmatrix} C & CA & \cdots & CA^i \end{pmatrix}^T$, $Y_I^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} y_I(t) & \dot{y}_I(t) & \cdots & y_I^{(i)}(t) \end{pmatrix}$. Тогда условие согласованности (12) запишется как $R(\alpha-1)x_I(0) = Y_I^{(\alpha-1)}(0)$. Проинтегрировав (11) по времени с учетом условий согласованности начальных условий получим, что движение обратной системы осуществляется по нестационарному инвариантному многообразию в пространстве состояний:

$$\sigma(x_I(t)) = R(\alpha-1)x_I(t) = Y_I^{(\alpha-1)}(t). \quad (13)$$

Таким образом, обратная система не является полностью управляемой [5], а значит, реализация (4) не является минимальной.

Понижение размерности обратных динамических систем. Применим метод расщепления для выделения подсистемы, описывающей движение по многообразию, которая и будет минимальной реализацией обратной системы.

Обозначим для краткости $R = R(\alpha-1)$ и будем считать, что инвариантное многообразие не вырождено, т.е. $\operatorname{rank} R = \alpha m$. Разложим пространство состояний системы X в прямую сумму пространств X_1 и X_2, где X_2 параллельно многообразию (13). Вводя проекционные операторы $P_1 = R^+R$ и $P_2 = I - R^+R$, получим: $X = X_1 \oplus X_2$, $x_2 = P_1x_I \in X_1$, $x_2 = P_1x_I \in X_2$, $\sigma = Rx_I = Rx_1$, $Rx_2 = 0$.

Пусть матрица W состоит из линейно независимых столбцов матрицы P_2. Так как $P_2 R^+ = 0$ и матрица R^+ невырождена, то $\dim\ker P_2 \geq \alpha m$. С другой стороны, $\operatorname{rank} R^+ R = \alpha m, \operatorname{rank} P_2 \geq n - \alpha m$. Таким образом, получаем, что $\operatorname{rank} P_2 = n - \alpha m$, а, значит, матрица W имеет размеры $n \times (n - \alpha m)$. Тогда вектор x_2 можно выразить как $x_2 = W\bar{x}, \bar{x} \in R^{n-\alpha m}$, то есть выполняется разбиение вектора x_I на вектора σ и $\bar{x}$. Действительно:

$$x_1 = R^+ R x_I = R^+\sigma, \quad x_2 = W\bar{x}; \quad x_I = R^+\sigma + W\bar{x} = Q^{-1}\begin{pmatrix}\sigma \\ \bar{x}\end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{bmatrix} R^+ & W \end{bmatrix}. \quad (14)$$

По сути, была выполнена замену переменных с матрицей Q. Учитывая, что $RW = 0$, нетрудно показать, что $Q = \begin{bmatrix} R \\ W^+ \end{bmatrix}$.

Подставим введенное преобразование в уравнение обратной системы (4):

$$\begin{pmatrix}\dot{\sigma} \\ \dot{\bar{x}}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ W^+ \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} R^+ & W \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\sigma \\ \bar{x}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ W^+ \end{bmatrix} BS^{-1}(\alpha) y_I^{(\alpha)}. \quad (15)$$

Выполняя поблочное умножение получаем:

$$\begin{pmatrix}\dot{\sigma} \\ \dot{\bar{x}}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & I_m \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & W^+ F R^+ & & & W^+ F W \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\sigma \\ \bar{x}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \\ W^+ B S^{-1}(\alpha) \end{bmatrix} y_I^{(\alpha)}. \quad (16)$$

Из (16), как и ранее, получаем, что $\sigma(t) = Y_I^{(\alpha-1)}(t)$. Рассматривая только компоненту $\bar{x}$, получим искомую минимальную реализацию системы:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{F}\bar{x} + \bar{G} Y_I^{(\alpha)}(t), \ \bar{F} = W^+ F W, \bar{G} = \begin{bmatrix} W^+ F R^+ & W^+ B S^{-1}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Конкретизируем возможный вид матриц $R, W, \bar{F}, \bar{G}$. Матрица R имеет полный ранг, будем считать, что первые ее αm столбцов линейно независимы: $R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}, \ R_1 \in R^{\alpha m \times \alpha m}, \ \det R_1 \neq 0$. Тогда получаем следующие выражения:

$$R^{+}=\begin{bmatrix} R_1^{-1} \\ 0_{(n-\alpha m)\times \alpha m}\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} -R_1^{-1}R_2 \\ I_{n-\alpha m}\end{bmatrix},\quad W^{+}=\begin{bmatrix} 0_{(n-\alpha m)\times \alpha m} & I_{n-\alpha m}\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0_{(n-\alpha m)\times \alpha m} & I_{n-\alpha m}\end{bmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{bmatrix} R_1^{-1} & -R_1^{-1}R_2 \\ 0_{(n-\alpha m)\times \alpha m} & I_{n-\alpha m}\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Вводя блочное разбиение исходных матриц $F=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2\end{bmatrix},$ можно записать: $\overline{F}=F_{22}-R_1^{-1}R_2F_{21},\quad \overline{G}=\begin{bmatrix} F_{21}R_1^{-1} & B_2S^{-1}(\alpha)\end{bmatrix}.$

Анализ динамики обратных систем с точки зрения движения по многообразиям. Рассмотрим для сравнения синтез синергетического закона управления для линейной системы

$$\dot{x}=Ax+Bu\,. \tag{19}$$

Будем искать управление u, которое обеспечивало бы движение системы (19) по линейному многообразию

$$\sigma(x)=Sx=k,\ k\in R^m,\ k=const \tag{20}$$

при условии $|SB|\neq 0$. Такой закон управления называют эквивалентным. Необходимым условием движения системы по многообразию (20) является

$$\dot{\sigma}(x)=\left(\frac{d}{dx}\sigma(x)\right)^T\dot{x}=S\dot{x}=SAx+SBu_{eq}=0\,. \tag{21}$$

Поэтому получаем эквивалентный закон управления в следующем виде:

$$u_{eq}=-(SB)^{-1}SAx. \tag{22}$$

Тогда уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$\dot{x}=\left(A-B(SB)^{-1}SA\right)x. \tag{23}$$

Заметим, что матрицу замкнутой системы можно представить в виде PA, где $P=I-B(SB)^{-1}S$ – проекционный оператор. Найдем характеристический полином системы (23): $\Delta_s(s)=\left|sI_n-A+B(SB)^{-1}SA\right|=\Delta(s)\left|I_n+B(SB)^{-1}SAR_A\right|=$ $\Delta(s)\left|I_m+SAR_AB(SB)^{-1}\right|=\Delta(s)\cdot s^m\cdot|W(s)|\cdot\left|(SB)^{-1}\right|$, где $\Delta(s)=|sI_n-A|$, $R_A=(sI_n-A)^{-1}$, $W(s)=SR_AB$. Поскольку $W(s)$ является передаточной функцией системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \sigma = Sx, \tag{24}$$

а $\Delta_0(s) = \Delta(s) \cdot |W(s)|$ – полиномом нулей системы, то набор полюсов системы (23) состоит из $(n-m)$ нулей системы (24) и нулевого полюса кратности m.

Также как и для обратных систем, проведем расщепление пространства состояний $x = x_1 + x_2 = P_1 x + P_2 x,\ P_1 = S^+ S,\ P_2 = I_n - S^+ S,\ \sigma = Sx_1,\ Sx_2 = 0$.

Пусть матрица W состоит из линейно независимых столбцов матрицы P_2. Аналогично получаем, что $W \in R^{n\times(n-m)}$. Нетрудно показать, что выполняются тождества $SW = 0,\ W^+ B = 0$. Тогда можно сделать замену:

$$\begin{gathered} x_1 = S^+\sigma,\ x_2 = Wz,\ z \in R^{n-m}; \\ x = \begin{bmatrix} S^+ & W \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ z \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \sigma \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ W^+ \end{bmatrix} x. \end{gathered} \tag{25}$$

Подставляя замену (25) в систему (23) получим:

$$\dot{z} = W^+ AWz + W^+ AS^+ k, \quad \dot{\sigma} = 0. \tag{26}$$

Система пониженного порядка (26) описывает поведение замкнутой системы (23) на инвариантном многообразии (20). Одинаковый вид уравнений (26) и (17), (23) и (13) позволяет трактовать движение обратной системы как движение по изменяющемуся во времени многообразию $\sigma(x_I(t)) = Rx_I(t) = Y_I^{(\alpha-1)}(t)$.

Выводы. В работе рассмотрены проекционные свойства динамики обратных динамических моделей произвольного порядка. Это позволило выделить инвариантное многообразие в пространстве состояний обратной системы, зависящее от входных сигналов, и построить минимальную реализацию системы. Кроме того, была продемонстрирована близость обратных динамических систем и замкнутых системы, управляемых эквивалентным синергетическим законом управления. Такая синергетическая трактовка обратных систем позволит использовать методы синергетического управления в задачах синтеза обратных динамических моделей.

Список литературы: ***1.*** *Костенко Ю. Т., Любчик Л. М.* Системы управления с динамическими моделями.– Х.: Основа, 1996. – 212 с. **2.** Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления. Ч. II / *Под. ред. А. А. Колесникова.* – Москва–Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 555 с. ***3.*** *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.– М.: Наука, 1967.– 576 с. ***4.*** *Levy S., Sivan. R.* On the stability of zero-output systems.// IEEE Trans. Automat. Control. – 1966.– № 11.– с. 315-316. ***5.*** *Позняк А. С.* Основы робастного управления (H^∞-теория).– М.: МФТИ, 1991.– 128 с.

Поступила в редколлегию 05.02.09